DIETER BETTEN

4-DIMENSIONALE PROJEKTIVE EBENEN MIT 3-DIMENSIONALER TRANSLATIONSGRUPPE

Friedrich Bachmann zum Gedenken

0. EINLEITUNG

Eine 4-dimensionale projektive Ebene ist eine topologische projektive Ebene, die zur Ebene über C homöomorph ist. Ihre Kollineationsgruppe ist eine Lie-Gruppe von Dimension $\leqslant 16$. Falls die Kollineationsgruppe mindestens 9-dimensional ist, dann ist die Ebene desarguessch, das heißt, zur Ebene über C isomorph. Bei 8-dimensionaler Kollineationsgruppe gibt es – bis auf Dualität – höchstens Translationsebenen [18]. Eine 4-dimensionale projektive Ebene heißt flexibel, falls die Kollineationsgruppe eine offene Bahn im Fahnenraum besitzt; diese Bahn ist dann 6-dimensional. Für 4-dimensionale Translationsebenen bedeutet Flexibilität, daß die Kollineationsgruppe mindestens 7-dimensional ist, und alle derartigen Ebenen sind in einer Reihe von Arbeiten vollständig bestimmt worden [2]–[7]. Mir erscheint es wünschenswert – und möglich – auch noch die flexiblen 4-dimensionalen Nicht-Translationsebenen zu bestimmen. Allerdings hat sich diese Aufgabe bislang als viel schwieriger erwiesen als die Herleitung der 4-dimensionalen Translationsebenen. Als Dimension der Kollineationsgruppe kommt dabei nur 6 oder 7 in Frage, Beispiel für flexible 4-dimensionale Nicht-Translationsebenen sind die 'komplexen Schiefparabelebenen' [8].

In der vorliegenden Arbeit machen wir nun den Ansatz, daß bezüglich einer festen Geraden eine 3-dimensionale Translationsgruppe existiert. Außerdem verlangen wir, daß eine Bahn dieser Translationsgruppe unter der vollen Kollineationsgruppe invariant ist. Diese Fixbahn ist homöomorph zu R^3 und zerlegt den affinen Punktraum R^4 in zwei Halbräume, auf denen jeweils eine 'halbe' Translationsebene induziert wird. Durchsicht der Klassifikation aller 4-dimensionalen Translationsebenen liefert dann Paare von Translationsebenen–Hälften die sich längs eines R^3 in der gewünschten Weise verheften lassen. Dieses Verfahren liefert mehrere Scharen flexibler Nicht–Translationsebenen. Dabei kann auch eine desarguessche Ebenenhälfte mit auftreten. Das Konstruktionsverfahren läßt sich als Verallgemeinerung des Knickprozesses auffassen, der bei 2-dimensionalen Ebenen zu den Moulton–Ebenen führt.

Geometriae Dedicata **16** (1984) 179–193. 0046–5755/84/0162–0179$02.25.
© 1984 *by D. Reidel Publishing Company.*

1. Herleitung der Ebenenklasse

Sei $(P, \mathscr{L})$ eine 4-dimensionale projektive Ebene, Γ die Gruppe aller stetigen Kollineationen und $\Delta = \Gamma^1$ die Einskomponente. Wir setzen nun voraus, daß eine Gerade L_∞ existiert, die unter Δ in sich geht, und bezüglich der eine 3-dimensionale Translationsgruppe vorliegt. Mit T bezeichnen wir die Einskomponente dieser Translationsgruppe. Der Raum $P - L_\infty$ der eigentlichen Punkte ist homöomorph zu R^4, wir bezeichnen ihn kurz mit R^4. Mit $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir die Menge der Bahnen von T auf R^4, versehen mit der Quotiententopologie.

LEMMA 1. (a) *Die 3-dimensionale Translationsgruppe T ist isomorph zur Vektorgruppe R^3.*

(b) *Es gibt einen Punkt $z \in L_\infty$ so, daß die Translationen in Richtung z einen 2-dimensionalen Unterraum von R^3 bilden. Die zu diesem Unterraum komplementären 1-dimensionalen Teilräume von R^3 entsprechen bijektiv den Translationsgruppen zu den Richtungen $z' \neq z$ auf L_∞.*

(c) *Auf dem Raum R^4 der eigentlichen Punkte läßt sich ein (x, y, u, v)-Koordinatensystem so einführen, daß die T-Bahnen genau durch $x = const.$ gegeben werden; insbesondere ist der Bahnenraum $\mathfrak{X}$ homöomorph zu R.*

Beweis. (a) Da die Gruppe der Translationen in einer Richtung höchstens 2-dimensional ist, die Translationsgruppe aber als 3-dimensional vorausgesetzt ist, gibt es Translationen in verschiedenen Richtungen, die Translationsgruppe ist daher kommutativ. Die Einskomponente T ist folglich eine 3-dimensionale zusammenhängende kommutative Lie-Gruppe. Nach [16, 3.2] enthält T keine von 1 verschiedenen kompakten Untergruppen, und daher folgt $T \cong R^3$.

(b) Jede Einparameteruntergruppe von T, daß heißt, jeder eindimensionale Teilraum von R^3 besteht aus Translationen mit ein und demselben Zentrum auf L_∞ [15, 3.26]. Dies liefert wie in [16, 4.6] eine stetige Abbildung vom Raum aller eindimensionalen Teilräume der Vektorgruppe $T = R^3$ (homöomorph zur reellen projektiven Ebene) in L_∞ (homöomorph zur 2-Sphäre). Diese Abbildung ist nicht injektiv, da man die reelle projektive Ebene nicht in die 2-Sphäre einbetten kann. Es gibt daher zwei verschiedene eindimensionale Teilräume (und somit einen 2-dimensionalen Unterraum) von R^3 mit ein und demselben Zentrum $z \in L_\infty$. Einen zweiten Punkt $z' \neq z$ auf L_∞ mit 2-dimensionaler Translationsgruppe gibt es nicht, sonst hätte T die Dimension 4, und die Ebene wäre eine Translationsebene, ein Widerspruch.

Indem wir die eindimensionalen Teilräume des ausgezeichneten 2-dimensionalen Teilraumes von R^3 zu einem Punkt identifizieren, erhalten wir eine stetige Abbildung der 2-Sphäre in eine 2-Sphäre, die injektiv und folglich surjektiv ist. Damit ist gezeigt, daß jeder Punkt $z' \neq z$ auf L_∞ das Zentrum einer eindimensionalen Translationsgruppe ist.

Zum Beweis von (c) führen wir auf der affinen Ebene $P - L_\infty$ ein (ξ, η)-Koordinatensystem so ein, daß die η-Achse durch $z \in L_\infty$ und die ξ-Achse durch einen Punkt $z' \in L$, $z' \neq z$, geht. Wir identifizieren den Ternärkörper K mit der η-Achse. Da die Translationsgruppe in Richtung z transitiv ist, ist die additive Loop $(K, +)$ eine kommutative Gruppe, und zwar gilt $(K, +) \cong (R^2, +)$. Die Translationen in z-Richtung haben dann die Form $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta + \tau)$, $\tau \in K$. Sei E die Bahn des Ursprungs unter der Einparametergruppe von Translationen in z'-Richtung, dann verifiziert man, daß die Translationen zur z'-Richtung in Koordinaten folgende Gestalt haben: $(\xi, \eta) \mapsto (\xi + \rho, \eta)$ mit $\rho \in E$. Insgesamt wirkt die Translationsgruppe T auf $K \times K \cong R^4$ als $(\xi, \eta) \mapsto (\xi + \rho, \eta + \tau)$ mit $\rho \in E$, $\tau \in K$. Der Bahnenraum $\mathfrak{X}$ ist damit homöomorph zum Restklassenraum von R^4 nach einer zu R^3 isomorphen Untergruppe und daher homöomorph zu R. Wenn wir $\xi = (x, y)$ und $\eta = (u, v)$ mit $x, y, u, v \in R$ ausschreiben, dann erhalten wir das im Lemma angegebene Koordinatensystem auf R^4.

Für die Wirkung von Δ auf dem Raum $\mathfrak{X}$ der T-Bahnen gilt

LEMMA 2. *Entweder führt Δ eine T-Bahn in sich über, oder Δ wirkt transitiv auf $\mathfrak{X}$.*

Beweis. Die zusammenhängende Gruppe Δ wirkt als topologische Transformationsgruppe auf dem zu R homöomorphen Raum $\mathfrak{X}$. Die Aussage folgt dann unmittelbar, siehe etwa [14, Hilfssatz 4].

Gemäß Lemma 2 gibt es bei der Untersuchung von 4-dimensionalen projektiven Ebenen mit 3-dimensionaler Translationsgruppe zwei Fälle:

(a) die Existenz einer Δ-invarianten T-Bahn, kurz 'Fixbahn', und

(b) Transitivität von Δ auf $\mathfrak{X}$ und folglich Transitivität von Δ auf $P - L_\infty$, kurz 'Transitivität'.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns auf den Fall (a) beschränken. Beispiele für den Fall (b) sind die komplexen Schiefparabelebenen.

LEMMA 3. *Die Gruppe Δ wirkt treu auf der Fixbahn $T \cong R^3$ und zwar als Untergruppe der affinen Gruppe von R^3.*

Beweis. Wir legen das (x, y, u, v)-Koordinatensystem so, daß die Fixbahn $T \cong R^3$ durch $x = 0$ gegeben wird. Sei $\delta \in \Delta$ eine Kollineation, die jeden Punkt der Fixbahn festhält. Dann fixiert δ insbesondere ein in der Fixbahn gelegenes Viereck und ist nach [16, 4.1] die Identität. Somit wirkt Δ treu auf der Fixbahn. Die nicht durch $z \in L_\infty$ gehenden Geraden der Ebene schneiden die Fixbahn R^3 in eindimensionalen affinen Teilräumen mit $y \neq \text{const.}$ Diese eindimensionalen affinen Teilräume werden unter Δ permutiert und folglich auch die von Paaren solcher eindimensionaler affiner Teilräume erzeugten 2-dimensionalen affinen Teilräume. Durch Schnitt der letztgenannten 2-dimensionalen affinen Teilräume mit den 'senkrechten' Geraden $x = 0$, $y = \text{const.}$ erhält man alle eindimensionalen affinen Teilräume des R^3. Somit permutiert Δ die eindimensionalen affinen Teilräume des R^3, ist also eine Untergruppe der affinen Gruppe des R^3.

Die Gruppe Δ ist folglich eine 6- oder 7-dimensionale Untergruppe der affinen Gruppe von R^3, der lineare Anteil also eine 3- oder 4-dimensionale Untergruppe der Matrizengruppe

$$\left\{\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ m & a & b \\ n & c & d \end{pmatrix}; r(ad - bc) \neq 0 \right\}.$$

Damit hat man schon einen guten Überblick über die möglichen Wirkungen auf der Fixbahn, es fehlt nur noch die Operation auf den beiden Zusammenhangskomponenten von $R^4 - R^3$.

Wir machen nun noch folgende Fallunterscheidung: entweder die Streckungsgruppe

$$\left\{\begin{pmatrix} r & & \\ & r & \\ & & r \end{pmatrix}; r > 0 \right\}$$

des R^3 setzt sich zu Kollineationen der Ebene fort oder nicht. Wir wollen uns hier auf den ersten Fall beschränken ('Fixbahn mit Streckungsgruppe').

SATZ 1. *Sei eine 4-dimensionale projektive Ebene mit 3-dimensionaler Translationsgruppe T bezüglich der Geraden L_∞ gegeben. Die Einskomponente $\Delta = \Gamma^1$ der vollen Kollineationsgruppe möge eine T-Bahn auf $P - L_\infty$ in sich überführen, ferner möge sich die positive Streckungsgruppe von $T \cong R^3$ zu Kollineationen der ganzen Ebene fortsetzen (Fixbahn mit Streckungsgruppe). Dann läßt sich auf $R^4 = P - L_\infty$ ein (x, y, u, v)-Koordinatensystem so einführen, daß die Fixbahn durch $x = 0$ gegeben wird und die Streckungsgruppe des R^3 sich zur Streckungsgruppe des R^4 fortsetzt. Jede nicht durch $z \in L_\infty$ gehende Gerade der Ebene wird durch eine Gleichung folgender Form gegeben:*

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 x + \beta y + u_0 \\ v &= f_1 x + gy + v_0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{für } x \leqslant 0,$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_2 x + \beta y + u_0 \\ v &= f_2 x + gy + v_0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{für } x \geqslant 0,$$

das heißt, sie ist aus zwei partiellen 2-dimensionalen affinen Teilräumen des R^4 *längs eines eindimensionalen affinen Teilraum der Fixbahn* R^3 *zusammengesetzt. Die von der gegebenen affinen Ebene* $P - L_\infty$ *auf dem Halbraum* $x \geqslant 0$ *induzierte Teilstruktur stimmt überein mit der Beschränkung einer 4-dimensionalen topologischen Translationsebene auf* $x \geqslant 0$, *und entsprechend wird für* $x \leqslant 0$ *eine 'halbe' Translationsebene induziert. Diese beiden Translationsebenenhälften werden längs des gemeinsamen Randes* R^3 *zu einer 4-dimensionalen affinen Ebene verheftet.*

Beweis. Wir führen ein (ξ, η)-Koordinatensystem wie in Lemma 1(c) ein, wobei der Ursprung dieses Koordinatensystems mit $0 \in R^3$ zusammenfallen soll. Da die Streckungen des R^3 sich zu Kollineationen der Ebene fortsetzen, sind dies Streckungen mit Zentrum 0 und Achse L_∞. Sie führen insbesondere die drei Geraden $0 \cup z'$, $0 \cup z$ und $\eta = \xi$ in sich und haben daher die Form $(\xi, \eta) \mapsto (\xi\mu, \eta\mu)$, $\mu \in K$. Auf dem Paar $(x, y) = \xi \in 0 \cup z'$ wird daher dieselbe Abbildung induziert wie auf dem Paar $(u, v) = \eta \in 0 \cup z$. Da nach Voraussetzung auf dem Paar (u, v) die Abbildung $(u, v) \mapsto (ru, rv)$, $r > 0$, induziert wird, bekommt man insgesamt die Abbildung $(x, y, u, v) \mapsto (rx, ry, ru, rv)$ auf $K \times K \cong R^4$. Dabei sei die Fixbahn $T \cong R^3$ wieder durch $x = 0$ gegeben.

Sei eine Gerade L durch $0 \in R^4$ gegeben, die nicht durch $z \in L_\infty$ geht. Sei $p \in L$ ein Punkt darauf, der im Halbraum $x > 0$ liegt. Dann entsteht der in $x \geqslant 0$ liegende Teil von L, indem man auf $0 \in R$ und auf p die positive Streckungsgruppe des R^4 und diejenige eindimensionale Translationsgruppe anwendet, welche L in sich führt. Die Vereinigung dieser beiden Bahnen ist die Beschränkung eines 2-dimensionalen affinen Teilraums des R^4 auf $x \geqslant 0$. Entsprechend hat die Gerade L auch für $x \leqslant 0$ die Gestalt eines partiellen 2-dimensionalen affinen Teilraumes des R^4. Durch Anwendung der Translationsgruppe in z-Richtung folgt, daß jede nicht durch $z \in L_\infty$ gehende Gerade die im Satz angegebene Gestalt hat.

Wir setzen die von der Ausgangsebene auf $x \geqslant 0$ induzierte Teilgeometrie zu einer Geometrie auf ganz R^4 fort, indem wir die auf $x \geqslant 0$ gegebenen partiellen 2-dimensionalen affinen Teilräume zu ganzen 2-dimensionalen affinen Teilräume auf R^4 ergänzen (ohne bei $x = 0$ abzuknicken) und die "Senkrechten" $(x, y) = \text{const}$, $x < 0$, als Geraden durch $z \in L_\infty$ hinzunehmen. Wir wollen zeigen, daß auf diese Weise eine topologische Translationsebene auf R^4 entsteht:

(a) der Nullpunkt $0 \in R^4$ ist mit jedem von ihm verschiedenen Punkt $(x, y, u, v) \in R^4$ durch genau einen 2-dimensionalen Teilraum verbunden. *Beweis*: Für $x \geqslant 0$ folgt das aus der Form der Ausgangsebene, wir können also $x < 0$ annehmen. Die gesuchte Verbindungsgerade von 0 und (x, y, u, v) ist ein 2-dimensionaler Teilraum des R^4, welcher den eindimensionalen

Teilraum durch 0 und (x, y, u, v) enthält. Der im Halbraum $x > 0$ verlaufende Teil dieses eindimensionalen Teilraumes bestimmt dort eindeutig einen partiellen 2-dimensionalen Teilraum, und dessen Ergänzung ist die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade von 0 und (x, y, u, v).

(b) Damit ist gezeigt, daß die Geraden durch $0 \in R^4$ eine Partition des R^4 bilden, und Anwendung der 2-dimensionalen Translationsgruppe in Richtung z zeigt, daß eine Translationsebene auf R^4 vorliegt.

(c) Diese Translationsebene ist topologisch. Zum Beweis genügt es nachzuprüfen, daß die mit der Partition verknüpfte 'transversale Bijektion' $\tau: R^2 \to R^2$, vgl. [2], ein Homöomorphismus ist. Eine Inspektion des Beweises von Satz 1b in [2] zeigt, daß beim Nachweis der Homöomorphieeigenschaft von τ die Kenntnis der Ebene für $x \geqslant 0$ genügt. Da die Ausgangsebene als topologisch vorausgesetzt ist, folgt daher, daß τ ein transversaler Homöomorphismus ist.

Damit ist gezeigt, daß die auf $x \geqslant 0$ induzierte Teilgeometrie die Beschränkung einer 4-dimensionalen topologischen Translationsebene ist, und analog folgt dies auch für $x \leqslant 0$.

BEMERKUNG. Wir haben oben geschlossen, daß eine Geometrie auf R^4, deren Geraden 2-dimensionale affine Teilräume sind, eine 4-dimensionale Translationsebene ist – sofern in einer Richtung eine 2-dimensionale Translationsgruppe vorliegt. Gilt die Aussage auch noch ohne diese Zusatzvoraussetzung, oder existieren Nicht-Translationsebenen auf R^4 mit lauter 2-dimensionalen affinen Teilräumen als Geraden? Man beachte, daß es im R^4 Paare windschiefer 2-dimensionaler affiner Teilräume gibt.

2. Konstruktion von Ebenen

Wir wollen nun die in 1. beschriebenen Ebenen konstruieren, indem wir zwei für $x \leqslant 0$ bzw $x \geqslant 0$ gegebene Translationsebenenhälften bei $x = 0$ zusammenheften. Die verheftete Ebene hat als Geraden die Geraden der Form $(x, y) = \text{const}$ durch $z \in L_\infty$, ferner die Geraden

$$L_{\beta,g,u_0,v_0} = \left\{ (x, y, u, v);\; \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u = \alpha_1(\beta, g)x + \beta y + u_0 \\ v = f_1(\beta, g)x + gy + v_0 \end{array}\right\} \text{ für } x \leqslant 0 \\ \left.\begin{array}{l} u = \alpha_2(\beta, g)x + \beta y + u_0 \\ v = f_2(\beta, g)x + gy + v_0 \end{array}\right\} \text{ für } x \geqslant 0 \end{array} \right\}$$

Dabei ist $\beta, g, u_0, v_0 \in R$, und $\alpha_1, f_1, \alpha_2, f_2$ sind geeignete stetige Funktionen in β und g. Wir prüfen nun nach, wann dies eine 4-dimensionale topologische affine Ebene ist. Dazu seien zwei Punkte (x_1, y_1, u_1, v_1), $x_1 \leqslant 0$, und (x_2, y_2, u_2, v_2), $x_2 \geqslant 0$, vorgegeben. Einsetzen in obige Gleichungen und Elimination von u_0 und v_0 ergibt

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\alpha_2(\beta, g)x_2 - \alpha_1(\beta, g)x_1 + \beta(y_2 - y_1) = u_2 - u_1 \\ &f_2(\beta, g)x_2 - f_1(\beta, g)x_1 + g(y_2 - y_1) = v_2 - v_i. \end{aligned}$$

Notwendig für die Existenz der verhefteten Ebene ist nun, daß das Gleichungssystem $(*)$ für gegebene $y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2, x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0$ sich eindeutig und stetig nach β und g auflösen läßt. Da man die Stetigkeit der Verbindung auf den beiden Halbebenen schon hat, folgt durch stückweises Zusammensetzen die Stetigkeit der Verbindung. Nun betrachten wir den Schnitt zweier Geraden. Falls der Schnittpunkt im Halbraum $x \leqslant 0$ liegt, dann ist die Beschränkung der Schnittoperation stetig, da auf $x \leqslant 0$ eine halbe topologische Translationsebene vorliegt. Entsprechend ist die Beschränkung der Schnittoperation auf Paare von Geraden mit Schnittpunkt in $x \geqslant 0$ stetig, und durch stückweises Zusammensetzen folgt die Stetigkeit des Schnittes. Da die Translationsgruppe in z-Richtung transitiv ist, hat man damit eine topologische affine Ebene, deren projektiver Abschluß eine 4-dimensionale topologische projektive Ebene ist. Wir fassen dies zusammen im

LEMMA 4. *Durch Verheftung zweier Translationsebenenhälften entsteht genau dann eine 4-dimensionale topologische Ebene, wenn das Gleichungssystem $(*)$ eindeutig und stetig nach β und g auflösbar ist.*

Sei Δ die Einskomponente der Kollineationsgruppe der verhefteten Ebene, dann bezeichnen wir mit Δ_1 bzw Δ_2 die Einschränkung von Δ auf die Translationsebenenhälfte $x \leqslant 0$ bzw $x \geqslant 0$. Es gilt

LEMMA 5. *Falls die durch Verheftung entstehende Ebene keine Translationsebene ist, dann bleibt der gemeinsame Rand R^3 unter Δ fest und es gilt $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$.*

Beweis. Angenommen, der gemeinsame Rand wäre nicht fest, dann wäre Δ transitiv auf R^4 und bei jedem Punkt $p \in R^4$ läge eine eindimensionale Streckungsgruppe vor. Nach [18, S. 239] wäre die Ebene dann eine Translationsebene im Widerspruch zur Voraussetzung. Sei E_2 die auf $x \geqslant 0$ induzierte Halbebene, $\bar{E}_2$ die ergänzte Translationsebene auf R^4 und $\bar{\Delta}_2$ die Kollineationsgruppe von $\bar{E}_2$, die R^3 festläßt. Wir zeigen $\Delta_2 = \bar{\Delta}_2$: sei eine Kollineation $\delta \in \Delta_2$ gegeben dann setzen wir δ zu einer Abbildung $\bar{\delta}$ auf ganz R^4 fort indem wir setzen $(x, y, u, v)^{\bar{\delta}} = -((-x, -y, -u, -v)^{\delta})$ für $x < 0$. Dann ist $\bar{\delta}$ ein Homöomorphismus von R^4, der 2-dimensionale

Teilräume in 2-dimensionale Teilräume überführt, also eine Kollineation von $\bar{E}_2$. Daher läßt sich jede Kollineation von E_2 zu einer Kollineation von $\bar{E}_2$ fortsetzen, und wir haben $\Delta_2 \subset \bar{\Delta}_2$. Da umgekehrt die Beschränkung jeder Kollineation aus $\bar{\Delta}_2$ auf den Halbraum $x \geqslant 0$ eine Kollineation von E_2 ist, folgt $\bar{\Delta}_2 \subset \Delta_2$. Da nun Δ und $\bar{\Delta}_2$ treu auf R^3 operieren und dort übereinstimmen, folgt $\Delta = \bar{\Delta}_2$. Insgesamt folgt $\Delta = \Delta_2$ und entsprechend folgt $\Delta = \Delta_1$.

Wir werden weiter unten aus den 4-dimensionalen Translationsebenen [2]–[7] Translationsebenenhälften heraussuchen, die sich gemäß Satz 1 zu einer Ebene verheften lassen. Da die Kollineationsgruppe durch ihre Wirkung auf dem gemeinsamen Rand R^3 festliegt, müssen beide Translationsebenenhälften dieselbe Kollineationsgruppe besitzen, das heißt, sie müssen aus derselben Ebenenschar stammen. Die Ebenenscharen hängen meist von einem oder mehreren Parametern ab, wobei die Parameter zum Teil in der Gruppe stecken ('Gruppenparameter') zum Teil 'geometrische Parameter' sind (Beispiel eines geometrischen Parameters ist etwa der Parameter bei den hyperbolischen projektiven Ebenen [14]). Nach Lemma 5 müssen wir die Gruppenparameter in beiden Ebenenhälften gleich nehmen, die geometrischen Parameter werden wir aber 'aufteilen', das heißt für $x \leqslant 0$ und für $x \geqslant 0$ verschieden ansetzen. Für einen solchen geometrischen Parameter w werden wir w_i schreiben, wobei $w_i = w_1$ für $x \leqslant 0$ und $w_i = w_2$ für $x \geqslant 0$ gesetzt wird.

Wir sind vor allem an Ebenen interessiert, die flexibel sind. Dazu ist notwendig, daß $\dim \Delta \geqslant 6$ gilt. Wir zeigen aber sogar

LEMMA 6. *Eine nach Satz* 1 *durch Verheftung entstehende Ebene ist genau dann flexibel, wenn* $\dim \Delta \geqslant 6$ *gilt.*

Beweis. Wenn man bei einer 4-dimensionalen Translationsebene einen Teilraum R^3 fixiert, verliert die Kollineationsgruppe mindestens eine Dimension. Aus $\dim \Delta \geqslant 6$ folgt daher, daß die beiden beteiligten Translationsebenen eine mindestens 7-dimensionale Kollineationsgruppe besitzen und daher flexibel sind. Wir zeigen nun, daß Δ eine 6-dimensionale Bahn im Fahnenraum der verhefteten Ebene besitzt: zunächst ist Δ transitiv auf dem durch $x > 0$ gegebenen Halbraum, da die positive Streckungsgruppe des R^4 transitiv auf der Menge der T-Bahnen mit $x > 0$ wirkt. Nun fixieren wir einen Punkt $p = (x_1, y_1, u_1, v_1)$ mit $x_1 > 0$. Die Standgruppe von Δ auf diesem Punkt ist noch mindestens 2-dimensional und enthält keine Streckungen mit Zentrum p und Achse L_∞. Da die ergänzte Translationsebene $\bar{E}_2$ flexibel ist, folgt, daß die Standgruppe Δ_p im Geradenbüschel $[p]$ eine

2-dimensionale Bahn besitzt. Sei L eine Gerade aus dieser Bahn, dann hat die Fahne $p \in L$ eine mindestens 6-dimensionale Bahn, und die Ebene ist flexibel.

Für die Wahl des Punktes $z \in L_\infty$ und der Fixbahn R^3 bedeutet das Lemma 6 folgendes: sei $\bar{\Delta}$ die gemeinsame Kollineationsgruppe der beiden beteiligten Translationsebenen, dann hat man dim $\bar{\Delta} = 7$ oder 8. Daraus folgt, daß z nicht aus einer 2-dimensionalen Bahn von $\bar{\Delta}$ auf L_∞ genommen werden darf, sonst bekäme man – da bei Fixieren von R^3 noch mindestens eine Dimension verloren geht – dim $\Delta \leqslant 5$. Der Punkt z muß also entweder ein Fixpunkt von $\bar{\Delta}$ auf L_∞ sein oder aus einer eindimensionalen Bahn von $\bar{\Delta}$ auf L_∞ stammen. Sei der Punkt z fixiert und sei dim $\bar{\Delta}_z = 7$, dann dürfen wir bei Fixieren des Raumes R^3 nur noch genau eine Dimension verlieren. Das ist nur dann möglich, wenn bei der Operation von $\bar{\Delta}_z$ auf $R^4/\bar{\Delta}_{[z,L_\infty]}$ ein eindimensionaler Teilraum festgehalten wird.

Die folgende Aufzählung von Ebenen soll zeigen, daß das Konstruktionsverfahren tatsächlich eine Reihe flexibler Nicht-Translationsebenen liefert. Eine Vollständigkeit der Liste wird nicht garantiert. Auch ersparen wir uns die Angabe der vollen Kollineationsgruppe Γ und die Bestimmung der genauen Isomorphietypen. Vermutlich läßt sich das Verfahren auch bei 8- und 16-dimensionalen Ebenen anwenden.

SATZ 2. *Aus den Translationsebenen* [2, Satz 5] *leitet sich folgende 2-parametrige Schar 4-dimensionaler Nicht-Translationsebenen ab: Auf* $R^4 = \{(x, y, u, v); x, y, u, v \in R\}$ *sind als Geraden gegeben alle Senkrechten der Form* $(x, y) = \text{const.}$, *ferner alle Geraden* L_{α,β,u_0,v_0}, α, β, u_0, $v_0 \in R$ *mit der Gleichung*

$$u = \alpha x + \beta y + u_0$$
$$v = -w_i[\beta]x + \alpha y + v_0.$$

Dabei ist $w_i = w_1$ *für* $x \leqslant 0$ *und* $w_i = w_2$ *für* $x \geqslant 0$ *und* $w_1 \neq w_2$. *Außerdem ist*

$$w_i[\beta] = \begin{cases} \beta & \text{für } \beta \geqslant 0 \\ w_i\beta & \text{für } \beta \leqslant 0. \end{cases}$$

Die Ebenen haben 3*-dimensionale Translationsgruppe bezüglich* L_∞ *und* 3*-dimensionale Scherungsgruppe mit z als Scherungszentrum. Sie sind flexibel und haben eine* 6*-dimensionale Kollineationsgruppe.*

Beweis. Als Punkt z muß ein Punkt aus der eindimensionalen Bahn auf L_∞ genommen werden, bis auf Isomorphie etwa der ferne Punkt der Geraden $(x, y) = (0, 0)$. Auszeichnung der invarianten T-Bahn kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfolgen indem man $x=0$ setzt. Als Standgruppe von Δ auf $0\in R^4$ hat man dann noch die Gruppe

$$\left\{\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ c & & d & \\ & c & & d \end{pmatrix}, a, d, c\in R, ad \neq 0\right\}.$$

Das Gleichungssystem (*) aus Lemma 4 hat die Form

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\alpha(x_1-x_2)+\beta(y_1-y_2)=u_1-u_2\\ &w_2[\beta]x_2-w_1[\beta]x_1+\alpha(y_1-y_2)=v_1-v_2. \end{aligned}$$

Elimination von α gibt folgende Gleichung für β:

$$\begin{aligned}(w_2[\beta]x_2-w_1[\beta]x_1)(x_1-x_2)&=(y_1-y_2)^2\beta\\ &+(v_1-v_2)(x_1-x_2)-(u_1-u_2)(y_1-y_2).\end{aligned}$$

Für die linke Seite L dieser Gleichung gilt

$$L=\begin{cases}-(x_1-x_2)^2\beta & \text{für } \beta\geqslant 0\\ (w_2x_2-w_1x_1)(x_1-x_2)\beta & \text{für } \beta\leqslant 0.\end{cases}$$

In beiden Fälen ist wegen $w_1, w_2>0, x_1<0, x_2>0$ der Faktor bei β negativ. Auf der rechten Seite steht eine Gerade mit Steigung $\geqslant 0$, und daher gibt es genau einen Schnitt, also genau eine Lösung β. Da der geknickte Linienzug L und die Gerade der rechten Seite sich stetig ändern wenn man $x_1, x_2, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2$ variiert, ist die Lösung β stetig.

BEMERKUNG. Es ist auch erlaubt, einen der beiden Parameter w_i als 1 zu nehmen, dann ist eine Ebenenhälfte die Hälfte einer desarguesschen Ebene.

SATZ 3. *Die Translationsebenen* [3, Satz 2] *liefern folgende* 3*-parametrige Schar* 4*-dimensionaler Nicht-Translationsebenen: Auf* $R^4=\{(x,y,u,v); x,y,u,v\in R\}$ *werden neben den Senkrechten* $(x,y)=\text{const.}$ *die Geraden* L_{s,t,u_0,v_0}, $s,t,u_0,v_0\in R$, *ausgezeichnet die durch folgende Gleichung gegeben sind*

$$(*)\qquad \begin{aligned} &u=(t-s^2/2)x+sy+u_0\\ &v=(-s^3/3-gs^2/2+f_is)x+(t+s^2/2+gs)y+v_0 \end{aligned}$$

Dabei ist $f_i=f_1$ *für* $x\leqslant 0, f_i=f_2$ *für* $x\geqslant 0, f_1\neq f_2$ *und* $g^2+4f_1\leqslant 0, g^2+4f_2\leqslant 0$. *Die Ebenen besitzen* 3*-dimensionale Translationsgruppe und* 3*-dimensionale*

Scherungsgruppe. Sie sind flexibel und ihre Kollineationsgruppe Δ ist 6-dimensional.

Beweis. Fixierung des Punktes $z \in L_\infty$ und Auszeichnung der T-Bahn durch $x = 0$ liegen hier fest. Der Parameter g ist ein Gruppenparameter, den Parameter f teilen wir auf in f_1, f_2. Das Gleichungssystem (*) aus Lemma 4 hat hier die Form

$$\left(t - \frac{s^2}{2}\right)(x_1 - x_2) + s(y_1 - y_2) = u_1 - u_2$$

$$\left(-\frac{s^3}{3} - g\frac{s^2}{2} + f_1 s\right)x_1 - \left(-\frac{s^3}{3} - g\frac{s^2}{2} + f_2 s\right)$$

$$+\left(t + \frac{s^2}{2} + gs\right)(y_1 - y_2) = v_1 - v_2.$$

Elimination von t ergibt folgende Gleichung für s:

$$\begin{aligned} F(s) = {} & -\tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)^2 s^3 + \left[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) - \frac{g}{2}(x_1 - x_2)^2\right]s^2 \\ & + [(f_1 x_1 - f_2 x_2)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)^2 \\ & + g(y_1 - y_2)(x_1 - x_2)]s + (u_1 - u_2)(y_1 - y_2) \\ & - (v_1 - v_2)(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

Die Ableitung $F'(s)$ ist eine quadratische Funktion in s mit der Diskriminante

$$\begin{aligned} D = {} & [2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) - g(x_1 - x_2)^2]^2 \\ & + 4(x_1 - x_2)^2[(f_1 x_1 - f_2 x_2)(x_1 - x_2) \\ & - (y_1 - y_2)^2 + g(y_1 - y_2)(x_1 - x_2)] \\ = {} & (x_1 - x_2)^2[g^2(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)(f_1 x_1 - f_2 x_2)] \\ = {} & (x_1 - x_2)^2[(g^2 + 4f_1)x_1^2 + (g^2 + 4f_2)x_2^2 \\ & - (g^2 + 4f_1 + g^2 + 4f_2)x_1 x_2] \leqslant 0, \end{aligned}$$

denn es ist $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ und $g^2 + 4f_1 \leqslant 0$, $g^2 + 4f_2 \leqslant 0$. Die kubische Funktion $F(s)$ besitzt somit eine negativ definite Ableitung, und daher ist die Gleichung $F(s) = 0$ eindeutig nach s auflösbar. Da in (*) nur differenzierbare Funktionen vorkommen, ist die Lösungsfunktion nach dem Satz über implizite Funktionen außerdem stetig.

Wir kommen nun zu den Translationsebenen [5, Satz 1]. Wie H. Hähl bemerkt hat, sind dies nur für $p = 0$ topologische Ebenen, wir setzen also durchweg $p = 0$. Für unsere Zwecke wollen wir die beiden Fixpunkte auf der

Translationsachse vertauschen und die Gruppe in folgender Form schreiben:

$$\Delta_w = \left\{ \begin{pmatrix} rs & & & \\ & rs^w & & \\ & & r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ & & r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} ; \begin{matrix} s>0 \\ s>0 \\ \varphi\in R \end{matrix} \right\}$$

Die Matrizen der Partition müssen dann invertiert werden, d.h.

$$\mathfrak{B}_{w,s} = \{W, S\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} s^{-1}(c\sin\varphi + \cos\varphi) & -s^{-w}\sin\varphi \\ -s^{-1}(c\cos\varphi - \sin\varphi) & s^{-w}\cos\varphi \end{pmatrix} ; s>0,\ \varphi\in R \right\}$$

wobei für die Parameter w und c gilt $0 < w < 1$ und $(w-1)^2c^2 \leqslant 4w$.

SATZ 4. *Aus den Translationsebenen* [5, Satz 1] *in obiger Form erhält man bei Fixieren der T-Bahn* $x = 0$ *folgende 3-parametrige Schar von Nicht-Translationsebenen: Auf dem Punktraum* $R^4 = \{(x, y, u, v);\ x, y, u, v \in R\}$ *seien als Geraden ausgezeichnet alle Waagrechten* $(u, v) = \text{const.}$, *alle Senkrechten* $(x, y) = \text{const.}$, *ferner alle Teilmengen* L_{s,φ,u_0,v_0}, $s > 0$, $\varphi, u_0, v_0 \in R$, *die durch die Gleichung*

$$u = s^{-1}(c_i\sin\varphi + \cos\varphi)x - s^{-w}\sin\varphi y + u_0$$
$$v = -s^{-1}(c_i\cos\varphi - \sin\varphi)x + s^{-w}\cos\varphi y + v_0$$

definiert werden. Dabei ist $c_i = c_1$ *für* $x \leqslant 0$ *und* $c_i = c_2$ *für* $x \geqslant 0$ *gesetzt. Für die Parameter* w, c_1, c_2 *gelten die Bedingungen* $(w-1)^2c_1^2 \leqslant 4w$, $(w-1)^2 c_2^2 \leqslant 4w$, $(w-1)^2c_1c_2 \leqslant 4w$ *und* $c_1 \neq c_2$. *Die Ebenen haben 3-dimensionale Translationsgruppe und 2-dimensionale Scherungsgruppe. Sie sind flexibel und ihre Kollineationsgruppe ist 6-dimensional.*

Beweis. Beim Suchen der Verbindungsgeraden von (x_1, y_1, u_1, v_1) und (x_2, y_2, u_2, v_2), $x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0$ können wir $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ annehmen, da sonst die Waagrechte durch die beiden Punkte die Verbindungsgerade wäre. Das Gleichungssystem (*) aus Lemma 4 hat – etwas umgeschrieben – die Form:

$$\begin{pmatrix} s^{-1}(x_2 - x_1) & s^{-1}(c_2x_2 - c_1x_1) - s^{-w}(y_2 - y_1) \\ -[s^{-1}(c_2x_2 - c_1x_1) - s^{-w}(y_2 - y_1)] & s^{-1}(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$ ist nach Voraussetzung nicht der Nullvektor, der Vektor $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ liegt auf dem Einheitskreis. Die Matrix ist eine Drehstreckung, abhängig von dem Parameter s. Wenn wir zeigen kännen, daß die Determinante dieser Matrix streng monoton in $s > 0$ ist, dann existiert genau ein s, das den Einheitskreis in den Kreis durch $\begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$ streckt. Auf dem Einheitskreis findet man dann eindeutig ein $\varphi \in R \bmod 2\pi$, das dabei nach $\begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$ übergeht.

Wenn wir s statt s^{-1} schreiben, dann erhalten wir für die Determinante:

$$\begin{aligned} D(s) = {} & s^2[(x_2 - x_1)^2 + (c_2x_2 - c_1x_1)^2] \\ & - 2s^{w+1}(c_2x_2 - c_1x_1)(y_2 - y_1) + s^{2w}(y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

mit der Ableitung nach s:

$$\begin{aligned} D'(s) = {} & 2s\{(x_2 + x_1)^2 + (c_2x_2 - c_1x_1)^2 \\ & -(w+1)s^{w-1}(c_2x_2 - c_1x_1)(y_2 - y_1) + ws^{2w-2}(y_2 - y_1)\}. \end{aligned}$$

In der geschweiften Klammer steht ein quadratisches Polynom in s^{w-1} mit Diskriminate

$$(y_2 - y_1)^2[(w-1)^2(c_2x_2 - c_1x_1)^2 - 4w(x_2 - x_1)^2].$$

Aus den vorausgesetzten Bedingungen an die Parameter w, c_1, c_2 folgt, daß die Diskriminante $\leqslant 0$ ist, und hieraus ergibt sich die Existenz der Verbindung.

Die Ebenen aus [5, Satz 2] werden ganz analog behandelt (man setze wieder $p = 0$ und vertausche die Rolle der beiden Fixpunkte auf der Translationsachse). Wir geben nur den Satz an:

SATZ 5. *Aus den Translationsebenen* [5, Satz 2] *leitet sich folgende 2-parametrige Schar topologischer 4-dimensionaler Nicht-Translationsebenen her: Auf dem Punktraum* $R^4 = \{(x, y, u, v) \colon x, y, u, v \in R\}$ seien als Geraden *ausgezeichnet alle Waagrechten* $(u, v) = const$, *alle Senkrechten* $(x, y) = const$, *ferner alle Teilmengen* L_{φ,t,u_0,v_0}, $\varphi \in R \bmod 2\pi, t, u_0, v_0 \in R$, *die durch die Gleichung*

$$u = e^{-t}(w_i \cos\varphi + t\sin\varphi)x + e^{-t}(-\sin\varphi)y + u_0$$

$$v = e^{-t}(w_i \sin\varphi - t\cos\varphi)x + e^{-t}\cos\varphi\, y + v_0$$

definiert werden. Dabei ist $w_i = w_1$ *für* $x \leqslant 0$ *und* $w_i = w_2$ *für* $x \geqslant 0$ *gesetzt. Für die Parameter* w_1, w_2 *gelten die Bedingungen* $1 \leqslant 4w_1^2$, $1 \leqslant 4w_2^2$, $1 \leqslant 4w_1w_2$

und $w_1 \neq w_2$. Die Ebenen haben 3-dimensionale Translationsgruppe bezüglich L_∞, 2-dimensionale Scherungsgruppe bezüglich $z \in L_\infty$ und besitzen eine 6-dimensionale Kollineationsgruppe.

BEMERKUNG. Die oben angegebenen Ebenen sind tatsächlich Nicht-Translationsebenen in dem Sinn, daß sie weder isomorph noch dual zu Translationsebenen sind: da sie nämlich flexible sind, müßte die duale Translationsebene eine mindestens 7-dimensionale Kollineationgruppe besitzen. Die aufgeführten Ebenen haben aber alle nur eine 6-dimensionale Kollineationsgruppe, da für $x \leqslant 0$ und für $x \geqslant 0$ nicht-isomorphe Translationsebenen genommen wurden und folglich die Fixbahn $x = 0$ unter der vollen Kollineationsgruppe invariant ist.

BEISPIEL. Wenn man die Ebenen aus [2, Satz 5] dualisiert, bekommt man Ebenen, die sich aus zwei desarguesschen Ebenenhälften zusammensetzen. Die beiden Hälften sind längs $\beta = 0$ verheftet. Als Frage bleibt, ob man zwei desarguessche Ebenenhälften so miteinander verheften kann, daß die entstehende Ebene weder isomorph noch dual zu einer Translationsebene ist.

LITERATURVERZEICHNIS

1. André, J.: 'Über nicht-desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe', *Math. Z.* **60** (1954), 156–186.
2. Betten, D.: '4-dimensionale Translationsebenen', *Math. Z.* **128** (1972), 129–151.
3. Betten, D.: '4-dimensionale Translationsebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe', *Geom. Dedicata* **2** (1973), 327–339.
4. Betten, D.: '4-dimensionale Translationsebenen mit irreduzibler Kollineationsgruppe', *Arch. Math.* **24** (1973), 552–560.
5. Betten, D.: '4-dimensionale Translationsebenen mit 7-dimensionaler Kollineationsgruppe', *J. reine ang. Math.* **285** (1976), 126–148.
6. Betten, D.: '4-dimensionale Translationsebenen mit genau einer Fixrichtung', *Geom. Dedicata* **3** (1975), 405–440.
7. Betten, D.: '4-dimensionale Translationsebenen mit kommutativer Standgruppe', *Math. Z.* **154** (1977), 125–141.
8. Betten, D.: 'Komplexe Schiefparabel-Ebenen', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **48** (1979), 76–88.
9. Dugundji, J.: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
10. Hähl, H.: 'Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen', *Geom. Dedicata* **4** (1975), 305–321.
11. Montgomery, D. and Zippin, L.: *Topological Transformation Groups*. Interscience, New York, 1955.
12. Pickert, G.: *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955, 1975.
13. Plaumann, P. und Strambach, K.: 'Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum', *Arch. Math.* **21** (1970), 455–465.
14. Salzmann, H.: 'Kompakte Ebenen mit einfacher Kollineationsgruppe', *Arch. Math.* **13** (1962), 98–109.

15. Salzmann, H.: 'Topological Planes', *Advances Math.* **2** (1967), 1–60.
16. Salzmann, H.: 'Kollineationsgruppen kompakter, vier-dimensionaler Ebenen', *Math. Z.* **117** (1970), 112–124.
17. Salzmann, H.: 'Kollineationsgruppen kompakter 4-dimensionaler Ebenen II', *Math. Z.* **121** (1971), 104–110.
18. Salzmann, H.: 'Kompakte, vier-dimensionale projektive Ebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe', *Math. Z.* **130** (1973), 235–247.
19. Strambach, K.: '4-dimensionale affine Ebenen', *Arch. Math.* **23** (1972), 342–345.

Anschrift des Verfassers:

Dieter Betten,
Christian Albrechts Univ.,
Mathematisches Seminar,
Alshausenstr. 40–60,
Haus S 12a,
D-2300 Kiel 1,
F. R. Germany

(Eingegangen am 22. Oktober 1983)